TEMA 0. MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

Matriz es el nombre genérico que en matemáticas se aplica a listas y tablas numéricas. Las matrices se emplean, entre otras muchas cosas, para almacenar información, para describir relaciones, para el estudio de sistemas de ecuaciones,…, y aparecen de modo natural en Economía, Sociología, Psicología, Estadística, Geometría,...

DEFINICIONES BÁSICAS

- **Matriz de orden *n x m***

Todo conjunto de elementos dispuestos de modo ordenado en forma de una tabla de ***n*** filas y ***m*** columnas. Se simboliza en las formas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \text{ ó}$$

$$A = (c_1, c_2, ..., c_m), \qquad \text{ó} \qquad A = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

siendo:

a_{ij} : el término situado en la fila i y columna j,

c_j : vector-columna formado por los elementos de la columna j

(j = 1, 2, ..., m)

f_i : vector-fila formado por los elementos de la fila i (i = 1, 2, ..., n)

Si $n = 1$, la matriz se denomina *matriz fila*.

Si $m = 1$, la matriz se denomina *matriz columna*.

Una matriz puede contener informaciones muy variadas:

- Resultado de una encuesta realizada a *n* individuos sobre *m* preguntas. Cada fila es la respuesta de un individuo.

- Una tecnología lineal que emplea *n* factores en *m* procesos productivos. Cada columna es un proceso productivo.

- Una aplicación lineal de R^n en R^m.

- Los coeficientes de las incógnitas de un modelo lineal de *n* ecuaciones y *m* incógnitas. Cada columna son los coeficientes de una incógnita.

- **<u>Matrices cuadradas</u>**

Son aquéllas en las que el número de filas coincide con el número de columnas $n = m$.

En las matrices cuadradas llamamos diagonal principal a los elementos en los que los subíndices *i* y *j* coinciden:

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \text{ forman la diagonal principal.}$$

La suma de los elementos de la diagonal principal se denomina **TRAZA** de la matriz.

$$Traz(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

Las matrices cuadradas que tengan nulos los elementos que quedan a uno de los lados de la diagonal principal se denominan **<u>matrices triangulares</u>**. Siendo: **subtriangular** si son nulos los que quedan a la izquierda y **súper triangular** sin son los de la derecha.

Matriz diagonal es la que tenga nulos todos los elementos que no estén en la diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Triangular inferior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diagonal

OPERACIONES ELEMENTALES CON MATRICES

Cuando los elementos de la matriz son números reales, o de cualquier cuerpo conmutativo, surge una capacidad operatoria con las matrices, o lo que es igual, surge una estructura algebraica en los conjuntos de matrices.

SUMA DE MATRICES

- Suma de dos matrices del mismo orden es la matriz que resulta al sumar los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas.

$$C_{n*m} = A_{n*m} + B_{n*m}$$

Sumándose elemento a elemento:

$$c_{ij} = \quad a_{ij} + b_{ij}$$

El elemento neutro de la suma matricial es la *matriz nula*, que tiene todos sus elementos iguales a cero.

Propiedades

Sean A, B, y C matrices del mismo orden y **0** la matriz nula, entonces

1. Asociativa: A + (B + C) = (A + B) + C
2. Conmutativa: A + B = B + A
3. Elemento neutro: A + **0** = A
4. Elemento opuesto: A + (-A) = **0**

PRODUCTO DE NÚMERO REAL POR MATRIZ

El producto de un número real (*k*) por una matriz *A* = (a_{ij}) es la matriz que resulta al multiplicar el escalar por cada uno de los elementos de la matriz *A* = (a_{ij}).

$$k \cdot A = B \quad / \; A, B \in M_{n*m} \; y \quad k \in R$$

siendo: $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$

PRODUCTO DE MATRICES

El producto de una matriz *A* de orden ***n*** x ***m,*** por otra matriz *B* de orden ***m*** x ***p,*** es la matriz *C*, de orden ***n*** x ***p,*** cuyo elemento genérico c_{ij} es el resultado de sumar los productos de los elementos de la fila *i* de *A* por los de la columna *j* de *B*.

$$A_{n*m} \cdot B_{m*p} = C_{n*p} \;/\; c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{im} \cdot b_{mj}$$

Propiedades

Suponiendo conformidad de órdenes entre las matrices A, B y C:

1. Asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. Distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3. No Conmutativa: $A \cdot B \neq B \cdot A$

El elemento neutro del producto matricial cuando las matrices son cuadradas es la *matriz identidad*, que tiene unos en la diagonal principal y el resto de elementos iguales a cero.

TRANSPOSICIÓN MATRICIAL

Transpuesta de una matriz A, de orden *n* x *m*, es la matriz A^t, de orden *m* x *n*, cuyas filas son las columnas de A.

$$A \in M_{n*m} \xrightarrow{\text{Transposición}} A^t \in M_{m*n}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Si la matriz A es cuadrada y además $a_{ij} = a_{ji}$, la matriz A^t coincide con *A*. Las matrices que cumplen $A^t = A$ se denominan **matrices simétricas**.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Propiedades</u>

1. **Propiedad involutiva**: el resultado de transponer dos veces (o un número par de veces) una matriz, es la propia matriz.

$$\left(A^t\right)^t = A$$

2. La transpuesta de una suma de matrices es la suma de las transpuestas.

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

3. La transpuesta de un producto de dos matrices es el producto de las transpuestas cambiadas de orden.

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

A toda matriz cuadrada A_{n*n} se le asocia un número llamado determinante de *A*, que se simboliza como $\det(A)$ o $|A|$.

Este número es una característica de la matriz que contiene información sobre la dependencia o independencia lineal de los vectores-columna (y de los vectores-fila) que forman la matriz *A*.

Lo más relevante es el hecho de que sea igual a cero o distinto de cero. En el primer caso, los vectores son linealmente dependientes (l.d.) y en el segundo, linealmente independientes (l.i.)

$$|A| = 0 \rightarrow matriz\ \sin gular \rightarrow l.d$$
$$|A| \neq 0 \rightarrow matriz\ regular \rightarrow l.i$$

El cálculo del determinante se basa en la definición que se da a continuación y en las propiedades que siguen:

DEFINICIÓN: Determinante de una matriz cuadrada A_{n*n} (de orden *n*) es el número que resulta al sumar todos los productos de *n* elementos de la matriz que cumplan dos requisitos:

1. Que en cada producto entre un solo elemento de cada fila y de cada columna.

2. Que a cada producto se le anteponga signo + o signo – según que haya un número par o impar de inversiones del orden natural en los subíndices de columnas, previa ordenación de los elementos de cada producto por filas, o en los subíndices de filas, previa ordenación de los elementos de cada producto por columnas.

De la definición se desprende que el número de productos que hay que sumar para calcular el determinante, coincide con el número de permutaciones que pueden hacerse con los n primeros números naturales, que es n!, y que a la mitad de ellos, hay que anteponer signo (-).

1. Determinante de una Matriz cuadra de orden 2

Número de productos 2! = 2. Ordenados los elementos por filas son de la forma $a_{1i}a_{2j}$. Los segundos subíndices pueden ser $\{1,2\}$ o $\{2,1\}$. Los primeros están en el orden natural, en los segundos hay una inversión del orden natural.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

2. Determinante de una matriz cuadrada de orden 3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Número de productos: 3! = 1.2.3 = 6.

Ordenados los elementos por filas, son de la forma $a_{1i}a_{2j}a_{3k}$.

Los segundos subíndices pueden ser

$\{1,2,3\}, \{2,3,1\}, \{3,1,2\}, \{3,2,1\}, \{2,1,3\}, \{1,3,2\}$.

En los tres primeros hay un número par de inversiones (se les antepone el signo + a los productos), los tres últimos tienen un número impar de inversiones del orden natural (se antepone signo – a los productos).

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} \\ &- a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} \end{aligned}$$

3. Determinante de una matriz de orden superior a tres

Existen distintos métodos que permiten calcular el determinante de un matriz de orden superior a tres, el más utilizado es el de los adjuntos.

La suma de los productos de los elementos de una fila (o una columna) pos sus respectivos adjuntos es igual al determinante de la matriz.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \, (-1)^{i+j} \, \det(M_{ij})$$

Donde: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ es el adjunto de a_{ij}.

Determinante de una matriz triangular

En una matriz triangular son nulos los elementos que quedan a uno de los lados de la diagonal principal. Debido a esto, los productos cuya suma es el determinante de la matriz son nulos, excepto el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Para el cálculo del determinante de una matriz cuadrada, no triangular, de orden mayor que tres, procede recurrir a las propiedades de los determinantes.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Permiten **simplificar el cálculo del determinante** en algunos casos, ***dar un procedimiento operativo para calcularlo*** en cualquier caso; además, **resuelven el problema de la dependencia e independencia lineal de *n* vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.**

1. PROPIEDADES QUE SIMPLIFICAN EL CÁLCULO:

PROPIEDAD 1

El determinante de una matriz coincide con el de su transpuesta

$$\det(A) = \det(A^t)$$

PROPIEDAD 2

Si una de las columnas (o de las filas) de la matriz es nula, el determinante vale 0.

$$\det\left(c_1, \ldots, \bar{0}, \ldots, c_n\right) = 0$$

PROPIEDAD 3

Si se intercambian entre sí dos columnas (o filas) de la matriz, el determinante cambia de signo.

$$\det(c_1 \ldots c_i \ldots c_j \ldots c_n) = -\det(c_1 \ldots c_j \ldots c_i \ldots c_n)$$

PROPIEDAD 4

Si la matriz tiene dos columnas (o filas) iguales, su determinante es cero.

$$\det(c_1 \ldots c_i \ldots c_j \ldots c_n) = 0 \quad si \quad c_i = c_j$$

PROPIEDAD 5

Si cada columna (o fila) de una matriz se multiplica por un escalar, el determinante de la nueva matriz es igual al producto de los escalares por el determinante de la matriz inicial.

$$\det\,(k_1 c_1,\ldots,k_j c_j,\ldots,k_n c_n) = k_1 \cdot \ldots \cdot k_j \cdot \ldots \cdot k_n \cdot \det\,(c_1 \ldots c_j \ldots c_n)$$

PROPIEDAD 6

Si una matriz tiene dos columnas (o filas) proporcionales, su determinante vale cero.

$$\det\left(c_1,\ldots,c_i,\ldots,kc_i,\ldots,c_n\right) = 0$$

PROPIEDAD 7

El determinante de una matriz producto de dos matrices cuadradas del mismo orden coincide con el producto de los determinantes de ambas.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

2. ***PROPIEDAD QUE CONDUCE A UN PROCEDIMIENTO PARA EL CÁLCULO DEL DETERMINANTE EN CUALQUIER CASO***:

PROPIEDAD 8

El determinante de una matriz no cambia de valor al sumar a una columna (o fila) una combinación lineal de las demás.

En esta propiedad se basa el **método de Laplace** para la resolución de determinantes. Consiste en hacer que una fila o columna tenga todos los elementos iguales a cero menos uno y aplicar a continuación el método de los adjuntos a esa fila o columna.

RANGO DE UNA MATRIZ

Si el determinante es un número real asociado sólo a las matrices cuadradas, el rango es un número natural asociado a cualquier matriz.

Si interpretamos las filas (o las columnas) de una matriz como vectores de R^n, el estudio de los modelos lineales de compatibilidad requiere procedimientos operativos que permitan averiguar la dependencia o independencia lineal de los vectores-columna formados por los coeficientes de las incógnitas. El concepto de determinante, al ir referido a matrices cuadradas, no aporta un procedimiento operativo general. Se hace necesario otro concepto más general, aplicable tanto a matrices cuadradas como no cuadradas. Tal concepto es el rango de la matriz.

DEFINICIÓN

Llamamos **MENORES** de orden *h* a los determinantes de las submatrices cuadradas formadas por los elementos comunes a *h* filas y *h* columnas cualesquiera de la matriz. Se dice que el **RANGO DE UNA MATRIZ *A*** es el número natural *r*, si algún menor de orden *r* es distinto de cero y todos los menores de orden mayor que *r* son nulos.

TEOREMA

El rango de una matriz coincide con el máximo número de vectores-columna y con el máximo número de vectores-fila linealmente independientes que hay en la matriz.

De este teorema se desprende que todo el problema relativo al estudio de la dependencia o independencia lineal entre vectores de los espacios de tipo R^n queda reducido al cálculo del rango de matrices.

CÁLCULO DEL RANGO

1. Elegir las dos primeras columnas y buscar un menor de orden dos no nulo. Si lo hay, c1 y c2 son l.i. y el rango de la matriz es, al menos dos. Si no lo hay, c2 es múltiplo de c1, se suprime c2, y se elige la siguiente columna en su lugar.

2. Partiendo del menor no nulo de orden 2, se elige una nueva columna y se van calculando solamente los menores de orden 3 que sean orlados del de orden dos no nulo, hasta encontrar uno no nulo. Si lo hay, las tres columnas son l.i. y el rango es al menos tres. Si no lo hay, la tercera columna es combinación lineal de las dos primeras y puede suprimirse.

3. Se reitera el procedimiento partiendo del menor de orden tres no nulo.

0.6.INVERSIÓN MATRICIAL

Sea A una matriz cuadrada de orden *n*. Se dice que A^{-1} es matriz inversa de la matriz A, si el producto de ambas matrices es igual a la matriz unidad (I).

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

La matriz A será invertible si su determinante es distinto de cero. En caso contrario no será invertible. Así pues las *matrices regulares* admiten inversa y las matrices singulares no admiten inversa.

Es condición necesaria y suficiente para que exista la inversa de una matriz cuadrada que su determinante sea distinto de cero.

PROPIEDADES

1. La inversa de una matriz, si existe, es única

2. El determinante de la inversa de una matriz, coincide con el inverso del determinante de la matriz.

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

3. La inversión es involutiva, es decir, aplicada dos veces (o un número par de veces) resulta la matriz inicial.

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

4. La inversa de un producto es igual al producto de las inversas cambiadas de orden.

$$\left(A.B\right)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

5. La inversa de la transpuesta de una matriz, es igual a la transpuesta de la inversa de la matriz

$$\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$$

CÁLCULO DE LA INVERSA

La inversa de la matriz A es igual al inverso de su determinante por la matriz formada por los adjuntos de A transpuestos.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A^t)$$

EXPRESIONES Y ECUACIONES MATRICIALES

Expresión matricial

Toda expresión en la que intervengan matrices cuyos órdenes sean conformes con las operaciones a las que van sometidas, es una **expresión matricial**. Tales expresiones a veces pueden simplificarse. Para ello se debe tener muy en cuenta la no conmutatividad del producto y las propiedades de la inversión y de la transposición matricial.

Ecuación matricial

Es toda igualdad entre expresiones matriciales en la que todas las matrices sean conocidas excepto una que es la matriz incógnita. Para despejar la matriz incógnita, al igual que en las ecuaciones algebraicas, se procede a transponer los términos de modo que la matriz incógnita quede en uno de los miembros, normalmente multiplicada por una o más matrices. Si la matriz que multiplica a la incógnita es regular (admite inversa), multiplicando en los dos miembros, al mismo lado, por su inversa, queda despejada la matriz incógnita.

Ejemplo: $A \cdot X = B$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema lineal de *m* ecuaciones con *n* incógnitas se escribe de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

o escrito en forma matricial quedaría:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A \cdot X = b$$

Discusión del sistema (Teorema de Rouchè-Frobenius)

Si rango(A) $\neq$ rango(A|b) $\Rightarrow$ el sistema es incompatible (sin solución)
Si rango(A) = rango(A|b) = n $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado (con solución única)
Si rango(A) = rango(A|b) < n $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (con múltiples soluciones)

Resolución del sistema (Regla de Cramer)

Si $|A| \neq 0 \Rightarrow X = A^{-1} \cdot b$

La regla de Cramer surge al despejar cada incógnita en la anterior ecuación matricial.

Si la matriz A no admite inversa, se suprimen las ecuaciones que sean redundantes y se forma un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas (con matriz A regular), pasando al lado derecho de cada ecuación las variables restantes.

Sistemas homogéneos

Son aquellos que tienen nulos todos los términos independientes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al ser nulos los términos independientes, coinciden los rangos de las matrices A y A|b, por lo que son siempre compatibles. La solución única será la trivial $(x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0)$.